Кіріспе

Төмендегі теңдеу типтерін қарастырайық:

- Гиперболалық теңдеулер

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = F_1(\xi,\eta,u(\xi,\eta),\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta});$$

- Параболалық теңдеулер

$$\frac{\partial u}{\partial\eta^2} = F_2(\xi,\eta,u(\xi,\eta),\frac{\partial u}{\partial\eta},\frac{\partial u}{\partial\xi});$$

- Эллиптикалық теңдеулер

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = F_3(\xi,\eta,u(\xi,\eta),\frac{\partial u}{\partial\eta},\frac{\partial u}{\partial\xi}).$$

Осы теңдеулерді шешу әдістерінің бірі Фурье әдісі болды (қайта бөлу әдісі). Фурье интегралдарын қолдануға негізделген әдістер де қолданылды. Параболалық типтегі теңдеулерге диффузия мен жылу өткізгіштіктің стационарлық емес есептері, ал гиперболалық типтегі теңдеулерге жолдың, мембрананың, электр тізбектеріндегі бағанның тербелісі туралы есептер беріледі.

Есептердің басқа класы Лаплас теңдеулерімен сипатталады.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^3} = 0 \text{ немесе } \Delta u = 0$$

және Пуассон теңдеулері

$$\Delta u = f.$$

Жылу өткізгіштік, электростатика, сұйықтық ағынының гидродинамикасы осы теңдеулерге әкеледі, бұл жағдайда біртекті изотропты денелерге арналған стационарлық есептер, яғни уақытша уақытша тәуелділігі жоқ есептер қарастырылады.

Шекаралық есептердің қойылуы.

Берілген D аймақтың барлық ішкі нүктелерінде $\Delta u = 0$ Лаплас теңдеуін қанағаттандыратын u функциясын тауып, ал D аймағының шекарасында шекара шарты деп аталатын белгілі бір шартты қанағаттандырады, ал қарастырылып отырған есеп шекаралық немесе шектік есеп деп аталады.

Шекаралық шарттардың түріне байланысты шекаралық есептер келесі түрлерге бөлінеді:

1. $u(x) = \psi(x), x \in \Gamma$ (шекаралық шарт) –I ші шекаралық есеп немесе Дирихле есебі;
2. $\dfrac{du}{dn} = \psi_1(x), x \in \Gamma$ – II шекаралық есеп немесе Нейман есебі;
3. $\dfrac{du}{dn} + \alpha u = \psi_2(x), x \in \Gamma$ –III шекаралық есеп немесе аралас тапсырма.

Мұндағы $\psi, \psi_1, \psi_2, \alpha$ - D аймағының шектес бетінде анықталған үздіксіз функциялар; $\dfrac{du}{dn}$ – Γ нүктесінде $\vec{n}$ нормалының сыртқы бағыты бойынша осы бетке алынған туынды.

Егер шешім ізделетін аймақ шектеулі болса, онда есеп ішкі деп аталады. Егер аймақ
белгілі бір шектеулі аймақтан тыс кеңістіктің бөлігі болса, онда есеп сыртқы деп аталады.

Есептің қисынды қойылуы. Тұрақты шешім ұғымы.

Егер математикалық физика есептерің шешімі берілген есептерге байланысты жалғыз және үздіксіз болса, онда ол дұрыс деп аталады. Белгілі бір шекаралық есепті қоюдың дұрыстығын қамтамасыз ететін жағдалар әртүрлі тапсырмалар үшін ерекшеленеді, бірақ барлық тұжырымдамаларға кіретін шарттар тобы бар.

Шекаралық есептерді шешуге мүмкіндік беретін функция:

1. Есеп қойылған облыста шекараға дейін үздіксіз;
2. Облыс ішінде үздіксіз екінші туынды бар болуы және берілген теңдеуді (Лаплас теңдеуі, Пуассон теңдеуі) қанағаттандыруы;
3. Берілген шекаралық шартты облыс шекарасында қанағаттандыруы керек;
4. Егер облыс үшөлшемді және шексіз болса, онда осы облыста жататын кез-келген сәуле бойымен шексіз алыс нүктеге ауысқан кезде функция нөлге ұмтылуы керек.

Аталған шарттарды қанағаттандыратын шекаралық есептердің шешімдері тұрақты деп аталады.

Негізгі шекаралық міндеттерді тұрақты шешу жалғыз және шекаралық шарттарға үздіксіз байланысты. Берілген шекаралық шарттар жеткілікті тегіс болған кезде ғана тұрақты шешімдер бар болады.

Гармоникалық функция.

Егер $u(x)$ функциясы x нүктесінде үздіксіз екінші туындыларға ие болса және Лаплас теңдеуін қанағаттандырса, онда гармоникалық функция деп аталады.

Егер $u(x)$ функциясы, D облыста үздіксіз және облыстың барлық ішкі нүктелерінде үйлесімді болса, D облысында гармоникалық деп аталады, $x \to \infty$ (яғни, шексіз алыс нүктеге) кезде D облысы шексіз болған жағдайда D облысына жататын кез келген сәуле бойымен нөлге ұмтылады.

Осыған байланысты Лаплас теңдеуінің тұрақты шешімі қарастырылып отырған облыста гармоникалық функция болып табылады.

Лаплас теңдеулері жай және қос қабатты потенциалдар әдісі арқылы шешіледі. Лаплас теңдеуімен шекаралық есепті шешу үшін күрделі айнымалы функциларды қолдануға негізделген басқа да тиімді әдістер бар, яғни есептер аналитикалық функциялар теориясының шекаралық есептеріне дейін жинақталады, ал мұндай есептерді шешуге арналған математикалық аппарат Коши типтес интегралдарын қолдануға негізделген.

Бигармоникалық теңдеулер. Бигармоникалық теңдеуге келтірілетін есептер.

Күрделі айнымалылардың аналитикалық функциялар теориясының шекаралық есептеріне бигармоникалық теңдеулер үшін де шекаралық есептер берілген: $\Delta\Delta\upsilon = 0.$

Бигармоникалық теңдеудің кеңейтілген түрі келесідей жазылады:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \upsilon}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Бигармоникалық астындағы функция ретінде келесі функцияларды қарастырамыз, олар:

1. бигармоникалық теңдеуді қанағаттандырады;
2. олардың төртінші ретке дейінгі туындылары үздіксіз;

3. екінші реттен бастап туындылар барлық облыста бірмәнді.

Қатты дененің серпімді тепе-теңдігі келесі жағдайларда серпімділік теориясының есептерінде келтірілген теңдеулермен сипатталады:

- денеге оның осіне қалыпты және барлық көлденең қималарға бірдей сыртқы күштер әсер еткен жағдайда, тұрақты бұрышты көлденең қиманың цилиндрлік денелерінің тегіс деформациясы кезінде;
- жалпыланған жазықтық кернеулі күйде, яғни жұқа пластинаның оның жазықтығында әрекет ететін күштермен деформациясы кезінде;

Екі жағдайда да есептерді шешу бигармоникалық теңдеулерді шешуге дейін жинақталады.

2 Аналитикалық функциялар теориясына байланысты ұғымдар.

$W = f(z)$ Z комплекс жазықтығының D облысында анықталған бірмәнді функция болсын. $W = f(z)$ функциясы $z \in D$ нүктесінде дифференциалданады, егер

$$\frac{\Delta W}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{\Delta z},$$

Мұндағы $z+h$ - D облысының кез келген нүктесі, $\Delta z = h$ тұрақты z кезінде 0-ге ерікті түрде ұмтылған кезде белгілі бір шеттік деңгейге ұмтылады, яғни

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

Егер $W = f(z)$ бірмәнді функциясы D облысының әр нүктесінде оның белгілі бір ақырлы туындысы болса, онда осы облыста аналитикалық деп аталады. Яғни, функция тек белгілі бір салада аналитикалық болуы мүмкін. Мұндай аймақтың әр нақты нүктесіндегі функция аналитикалық деп айтылады. Бұл жағдайда нүктедегі аналитикалық функция анықтама бойынша осы нүктенің белгілі бір аймағында аналитикалық болуы керек.

Ескерту. Комплекс айнымалы үшін дифференциалдау талабы нақты айнымалы үшін аналогиялық талапқа қарағанда күшті. Шынында да, z-тің кейбір нүктелерінде $F(z)$ функциясының дифференциалдануымен

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

$z+h$ айнымалы нүктесі z тұрақты нүктесіне жақындағанда оның бағытына қарамастан бірдей сан болады деп санаймыз.

Облыстың әр нүктесінде дифференциалданатын функция ұғымы одан да күшті болады. Демек, облыста аналитикалық функция бірқатар ерекше қасиеттерге ие болуы керек.

$f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$ D облысында анықталған z комплекс айнымалысының бірмәнді функциясы болсын. $u(x,y)$ және $\upsilon(x,y)$ D облысындағы дифференциалданатын функциялар болсын. Онда $W=f(z)$ функциясы D облысында аналитикалық болуы үшін Коши-Риман шарты орындалуы қажетті және жеткілікті:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}. \tag{1}$$

Бұл шарттар $f(z)$ аналитикалық функциясын алу үшін u және υ функцияларын бір-бірінен тәуелсіз таңдау мүмкін еместігін көрсетеді. (1) теңдеуді x бойынша дифференциалдап, ал екіншісін y бойынша дифференциалдап нәтижесін мына түрде аламыз

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

яғни, $\Delta u=0.$ Сол сияқты $\Delta\upsilon=0$. Демек, u және υ функциялары D облысында гармоникалық функция болады. $u=\operatorname{Re} f(z)$ және $\upsilon=\operatorname{Im} f(z)$ екенін ескерейік, сондықтан $f(z)$ аналитикалық функциясы гармоникалық функция болады. Алайда, u және υ функциялары үшін D облысынан кез келген екі гармоникалық функция алатын болсақ, онда $u+i\upsilon$ жалпы жағдайда бұл облыста аналитикалық функция болмайды. $u+i\upsilon$ функциясы D облысында аналитикалық болуы үшін, олардың біреуі үшін кез келген гармоникалық функцияны алу керек, мысалы u, содан кейін Коши-Риман теңдеуінен (1) υ-ны анықтау керек.

Функцияның голоморфизмі туралы түсінік.

Егер $f(z)$ функциясы a нүктесінің белгілі бір маңайында $(z-a)$ түрінде дәрежелік қатарға жіктелсе, онда $f(z)$ функциясы a нүктесінде голоморфты функция болып табылады $.a$ нүктесіндегі голоморфты функцияның бұл қасиеті осы нүктедегі аналитикалық қасиетке эквивалентті. Дәрежелік қатардағы нүктенің маңайындағы функцияның кеңеюімен аналитикалық ұғымды қолданамыз. $f(z)$ аналитикалық функциясының туындысын оның нақты және болжам бөліктері u және υ арқылы келесі түрде аламыз:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+i\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$$

Комплекс функцияның интегралы.

$W=f(z)$ D облысында анықталған z комплекс айнымалысының кез келген үздіксіз функциясы болсын. L -D облысында жататын a және b нүктелерін қосатын жай тегіс қисық болсын.

Тегіс қисық (немесе контур) деп біз жанамалары үздіксіз өзгеретін және қайтару нүктелері жоқ (заострения) тұйық немесе ашық қарапайым(яғни, қиылысу нүктелері жоқ) сызықты түсінеміз.

L қисығының бойындағы $f(z)$ интегралы анықталады

$$\int_L f(z)dz=\int_L(udx-\upsilon dy)+\int_L(\upsilon dx+udy)=\int_L(u-i\upsilon)(dx+idy),$$

яғни, ол екі нақты қисық сызықты интегралдар арқылы өрнектеледі.

Егер $z=z(t)$, L қисығы $\alpha\le t\le\beta$ үшін параметрлік түрлде берілсе, онда

$$\int_L f(z)dz=\int_L[u(z(t))x'(t)-\upsilon(z(t))y'(t)]dt+$$
$$+i\int_\alpha^\beta[\upsilon(z(t))x'(t)+u(z(t))y'(t)]dt=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

Егер L қисығы $L_1,L_2,\dots L_N$ тегіс қисық бөліктерінен тұратын болса, онда

$$\int_L f(z)dz=\int_{L_1}f(z)dz+\ldots+\int_{L_N}f(z)dz$$

Коши теоремасы.

Бекіту. Егер $f(z)$ бір байланысты D облысында аналитикалық және $L \in D$ бөлікті-тегіс қисық болса, онда $\int_L f(z)dz$ L сызығының формасына байланысты емес, тек осы сызықтың бастапқы және соңғы нүктесінің орналасуымен анықталады.

Теорема. Егер $f(z)$ бір байланысты D облысында аналитикалық болса, онда кез келген тұйық $C \in D$ контуры үшін келесі теңдік орындалады.

$$\int_C f(z)dz = 0 .$$